Transformación de Darboux entre pesos matriciales y las álgebras $\mathcal{D}(W)$

Ignacio Nicolás Bono Parisi

XVII Congreso Monteiro

Junio, 2023

Preliminares

- Un peso matricial de tamaño N con soporte en un intervalo real (a, b), es una función $W : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{C})$ Hermitiana definida positiva para casi todo punto en (a, b), se anula fuera de (a, b), y $\int_{\mathbb{R}} x^n W(x) dx < \infty$.

Preliminares

- Un peso matricial de tamaño N con soporte en un intervalo real (a, b), es una función $W : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{C})$ Hermitiana definida positiva para casi todo punto en (a, b), se anula fuera de (a, b), y $\int_{\mathbb{R}} x^n W(x) dx < \infty$.
- Dados $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$, se asocia al peso el producto interno

$$\langle P, Q \rangle_W = \langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x) W(x) Q(x)^* dx.$$

Preliminares

- Un peso matricial de tamaño N con soporte en un intervalo real (a, b), es una función $W : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{C})$ Hermitiana definida positiva para casi todo punto en (a, b), se anula fuera de (a, b), y $\int_{\mathbb{R}} x^n W(x) dx < \infty$.
- Dados $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$, se asocia al peso el producto interno

$$\langle P, Q \rangle_W = \langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x) W(x) Q(x)^* dx.$$

- Con este producto interno se construye una única sucesión de polinomios mónicos ortogonales $\{P(x, n)\}$

Preliminares

Dado un operador diferencial $\mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{m} \partial^j F_j$ y un polinomio matricial $Q(x)$ tenemos que

$$Q(x) \cdot \mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{m} \partial^j (Q(x)) F_j(x).$$

Preliminares

Dado un operador diferencial $\mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{m} \partial^j F_j$ y un polinomio matricial $Q(x)$ tenemos que

$$Q(x) \cdot \mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{m} \partial^j (Q(x)) F_j(x).$$

- Introducimos el álgebra $\mathcal{D}(W)$ asociada al peso W

$$\mathcal{D}(W) = \left\{ \mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{m} \partial^j F_j \text{ tales que } P(x,n) \cdot \mathfrak{D} = \Lambda_n P(x,n) \right\}.$$

Preliminares

Tenemos entonces W peso de tamaño $N \times N$,

$$W \to \langle \quad , \quad \rangle_W \to P(x,n) \to \mathcal{D}(W).$$

Preliminares

Tenemos entonces W peso de tamaño $N \times N$,

$$W \to \langle \quad , \quad \rangle_W \to P(x,n) \to \mathcal{D}(W).$$

Definición: $\mathfrak{D}$ se dice W-simétrico si

$$\langle P(x) \cdot \mathfrak{D}, Q(x) \rangle_W = \langle P(x), Q(x) \cdot \mathfrak{D} \rangle_W$$

para todo $P, Q \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})[x]$.

Tenemos entonces W peso de tamaño $N \times N$,

$$W \to \langle \quad , \quad \rangle_W \to P(x,n) \to \mathcal{D}(W).$$

Definición: $\mathfrak{D}$ se dice W-simétrico si

$$\langle P(x) \cdot \mathfrak{D}, Q(x) \rangle_W = \langle P(x), Q(x) \cdot \mathfrak{D} \rangle_W$$

para todo $P, Q \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})[x]$.

• Se tiene que $\mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W)$,
donde $\mathcal{S}(W) = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W) \,:\, \mathfrak{D} \text{ es } W\text{-simétrico}\}$.

Preliminares

Tenemos entonces W peso de tamaño $N \times N$,

$$W \to \langle \quad , \quad \rangle_W \to P(x, n) \to \mathcal{D}(W).$$

Definición: $\mathfrak{D}$ se dice W-simétrico si

$$\langle P(x) \cdot \mathfrak{D}, Q(x) \rangle_W = \langle P(x), Q(x) \cdot \mathfrak{D} \rangle_W$$

para todo $P, Q \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})[x]$.

• Se tiene que $\mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W)$,
donde $\mathcal{S}(W) = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W) \ : \ \mathfrak{D} \text{ es } W\text{-simétrico}\}$.

Proposición: Si $\mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{m} \partial^j F_j$ es W-simétrico y $\deg(F_j) \leq j$, entonces $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$.

Álgebra $\mathcal{D}(W)$

Ejemplo: El peso escalar clásico de Hermite

$$w(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sucesión de polinomios ortogonales mónicos:

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

El operador diferencial de segundo orden

$$\delta = \partial^2 + \partial(-2x)$$

es simétrico y está en $\mathcal{D}(w)$

Álgebra $\mathcal{D}(W)$

Ejemplo: El peso escalar clásico de Hermite

$$w(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sucesión de polinomios ortogonales mónicos:

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

El operador diferencial de segundo orden

$$\delta = \partial^2 + \partial(-2x)$$

es simétrico y está en $\mathcal{D}(w)$

$$h_n(x) \cdot \delta = h_n''(x) - 2xh_n'(x) = -2nh_n(x)$$

Álgebra $\mathcal{D}(W)$

Ejemplo: El peso escalar clásico de Hermite

$$w(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sucesión de polinomios ortogonales mónicos:

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

El operador diferencial de segundo orden

$$\delta = \partial^2 + \partial(-2x)$$

es simétrico y está en $\mathcal{D}(w)$

$$h_n(x) \cdot \delta = h_n''(x) - 2xh_n'(x) = -2nh_n(x)$$

Más aún, el álgebra $\mathcal{D}(w)$ es:

$$\mathcal{D}(w) = \mathbb{C}[\delta],$$

Álgebra $\mathcal{D}(W)$

Consideremos el peso de Hermite 2×2,

$$w(x) \oplus w(x) = e^{-x^2} I = \begin{pmatrix} e^{-x^2} & 0 \\ 0 & e^{-x^2} \end{pmatrix}.$$

Álgebra $\mathcal{D}(W)$

Consideremos el peso de Hermite 2×2,

$$w(x) \oplus w(x) = e^{-x^2} I = \begin{pmatrix} e^{-x^2} & 0 \\ 0 & e^{-x^2} \end{pmatrix}.$$

Conociendo el álgebra para el caso escalar $w(x) = e^{-x^2}$, fácilmente se deduce que

$$\mathcal{D}(w \oplus w) = \begin{pmatrix} \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \\ \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \end{pmatrix}.$$

Álgebra $\mathcal{D}(W)$

Consideremos el peso de Hermite 2×2,

$w(x) \oplus w(x) = e^{-x^2} I = \begin{pmatrix} e^{-x^2} & 0 \\ 0 & e^{-x^2} \end{pmatrix}.$

Conociendo el álgebra para el caso escalar $w(x) = e^{-x^2}$, fácilmente se deduce que

$$\mathcal{D}(w \oplus w) = \begin{pmatrix} \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \\ \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \end{pmatrix}.$$

¿Qué pasa con pesos más complicados?

Álgebra $\mathcal{D}(W)$

Consideremos el peso de Hermite 2×2,
$$w(x) \oplus w(x) = e^{-x^2} I = \begin{pmatrix} e^{-x^2} & 0 \\ 0 & e^{-x^2} \end{pmatrix}.$$
Conociendo el álgebra para el caso escalar $w(x) = e^{-x^2}$, fácilmente se deduce que
$$\mathcal{D}(w \oplus w) = \begin{pmatrix} \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \\ \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \end{pmatrix}.$$

¿Qué pasa con pesos más complicados?

Por ejemplo
$$W(x) = e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2 x & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}.$$

Álgebra $\mathcal{D}(W)$

Consideremos el peso de Hermite 2×2,

$$w(x) \oplus w(x) = e^{-x^2} I = \begin{pmatrix} e^{-x^2} & 0 \\ 0 & e^{-x^2} \end{pmatrix}.$$

Conociendo el álgebra para el caso escalar $w(x) = e^{-x^2}$, fácilmente se deduce que

$$\mathcal{D}(w \oplus w) = \begin{pmatrix} \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \\ \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \end{pmatrix}.$$

¿Qué pasa con pesos más complicados?

Por ejemplo

$$W(x) = e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2 x & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Qué puedo decir sobre el álgebra $\mathcal{D}(W)$?

Transformación de Darboux

Transformación de Darboux.

Transformación de Darboux.

Definición: Dados dos pesos W y $\widetilde{W}$ con (P_n) y $(\widetilde{P}_n)$ sus sucesiones de polinomios mónicos ortogonales, decimos que $\widetilde{W}$ es una **transformación de Darboux** de W si existe un operador diferencial $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ que puede factorizarse como $\mathfrak{D} = \mathcal{V}\mathcal{N}$ y cumple

$$P_n(x) \cdot \mathcal{V} = A_n \widetilde{P}_n(x) \quad \forall\, n \geq 0$$

con A_n invertible para todo n.

Transformación de Darboux.

Definición: Dados dos pesos W y $\widetilde{W}$ con (P_n) y $(\widetilde{P}_n)$ sus sucesiones de polinomios mónicos ortogonales, decimos que $\widetilde{W}$ es una **transformación de Darboux** de W si existe un operador diferencial $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ que puede factorizarse como $\mathfrak{D} = \mathcal{V}\mathcal{N}$ y cumple

$$P_n(x) \cdot \mathcal{V} = A_n \widetilde{P}_n(x) \quad \forall\, n \geq 0$$

con A_n invertible para todo n.
Como consecuencia inmediata de la defínción se tiene que $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathcal{N}\mathcal{V}$ está en $\mathcal{D}(\widetilde{W})$

$$\widetilde{P}_n \cdot \mathcal{N}\mathcal{V} = A_n^{-1} P_n \cdot \mathcal{V}\mathcal{N}\mathcal{V} = A_n^{-1} \Lambda_n(\mathfrak{D}) P_n \cdot \mathcal{V} = A_n^{-1} \Lambda_n(\mathfrak{D}) A_n \widetilde{P}_n$$

Transformación de Darboux

La Transformación de Darboux define una relación de equivalencia entre los pesos matriciales.

Transformación de Darboux

La Transformación de Darboux define una relación de equivalencia entre los pesos matriciales.

También nos permite relacionar las álgebras de los pesos.

Teorema

Se tienen las siguientes contenciones

$$\mathcal{V}\mathcal{D}(\widetilde{W})\mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}(W) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}\mathcal{D}(W)\mathcal{V} \subset \mathcal{D}(\widetilde{W})$$

Transformación de Darboux

La Transformación de Darboux define una relación de equivalencia entre los pesos matriciales.

También nos permite relacionar las álgebras de los pesos.

Teorema

Se tienen las siguientes contenciones

$$\mathcal{V}\mathcal{D}(\widetilde{W})\mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}(W) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}\mathcal{D}(W)\mathcal{V} \subset \mathcal{D}(\widetilde{W})$$

Más aún, eligiendo bien la factorización se tiene

$$\mathcal{V}\mathcal{S}(\widetilde{W})\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}(W) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}\mathcal{S}(W)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}(\widetilde{W})$$

Transformación de Darboux

Sean $\widetilde{W}(x) = e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}$ y $W(x) = e^{-x^2} I$.

Veamos que $\widetilde{W}$ transformación de Darboux de $W(x)$.

Transformación de Darboux

Sean $\widetilde{W}(x) = e^{-x^2}\begin{pmatrix} 1+a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}$ y $W(x) = e^{-x^2}I$.

Veamos que $\widetilde{W}$ transformación de Darboux de $W(x)$.

Tomamos

$$\mathfrak{D} = \partial^2 I + \partial \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+4/a^2 & 0 \\ 0 & 4/a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(e^{-x^2}I)$$

.

Transformación de Darboux

Sean $\widetilde{W}(x) = e^{-x^2}\begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}$ y $W(x) = e^{-x^2} I$.

Veamos que $\widetilde{W}$ transformación de Darboux de $W(x)$.

Tomamos

$$\mathfrak{D} = \partial^2 I + \partial \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 + 4/a^2 & 0 \\ 0 & 4/a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(e^{-x^2} I)$$

.

Factorizamos este operador como $\mathfrak{D} = \mathcal{V}\mathcal{N}$.

$$\mathcal{V} = \partial \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -ax \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{a} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N} = \partial \begin{pmatrix} -ax & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{a} \end{pmatrix}.$$

Transformación de Darboux

La sucesión de polinomios mónicos ortogonales de $e^{-x^2} I$ es $P_n(x) = h_n(x) I$.

La sucesión de polinomios mónicos ortogonales de $e^{-x^2}I$ es $P_n(x) = h_n(x)I$.

Se tiene que $P_n(x) \cdot \mathcal{V} = h_n(x) \cdot \mathcal{V} = An\widetilde{P}_n(x)$, con $A_n = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{a} - an \end{pmatrix}$ invertible para todo n. Luego $\widetilde{W}$ es transformación de Darboux de W.

Transformación de Darboux

La sucesión de polinomios mónicos ortogonales de $e^{-x^2}I$ es $P_n(x) = h_n(x)I$.

Se tiene que $P_n(x) \cdot \mathcal{V} = h_n(x) \cdot \mathcal{V} = An\widetilde{P}_n(x)$, con $A_n = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{a} - an \end{pmatrix}$ invertible para todo n. Luego $\widetilde{W}$ es transformación de Darboux de W.

En particular tenemos que

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathcal{N}\mathcal{V} = \partial^2 I + \partial \begin{pmatrix} -2x & 2a \\ 0 & -2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{a^2} + 2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{a^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\widetilde{W}).$$

Transformación de Darboux

Ahora que tenemos la transformación de Darboux y conocemos el álgebra de $W = e^{-x^2} I$, procedemos a calcular $\mathcal{D}(\widetilde{W})$.

Transformación de Darboux

Ahora que tenemos la transformación de Darboux y conocemos el álgebra de $W = e^{-x^2}I$, procedemos a calcular $\mathcal{D}(\widetilde{W})$.

Como $\mathcal{D}(W) = \begin{pmatrix} \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \\ \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \end{pmatrix}$ tiene todo sus operadores de orden par, y $\mathcal{V}\mathcal{D}(\widetilde{W})\mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}(W)$, entonces $\mathcal{D}(\widetilde{W})$ tiene todos sus operadores de orden par.

Transformación de Darboux

Ahora que tenemos la transformación de Darboux y conocemos el álgebra de $W = e^{-x^2} I$, procedemos a calcular $\mathcal{D}(\widetilde{W})$.

Como $\mathcal{D}(W) = \begin{pmatrix} \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \\ \mathbb{C}[\delta] & \mathbb{C}[\delta] \end{pmatrix}$ tiene todo sus operadores de orden par, y $\mathcal{V}\mathcal{D}(\widetilde{W})\mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}(W)$, entonces $\mathcal{D}(\widetilde{W})$ tiene todos sus operadores de orden par.

Además, usando que $\mathcal{N}\mathcal{D}(W)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{D}(\widetilde{W})$, tenemos que $\mathcal{D}(\widetilde{W})$ contiene los siguientes operadores de orden 2

$$D_1 = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{V}, \; D_2 = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{V},$$

$$D_3 = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{V}, \; D_4 = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \mathcal{V}.$$

Teorema: el álgebra $\mathcal{D}(\widetilde{W})$ está generada por $\{I, D_1, D_2, D_3, D_4\}$.

$$D_1 = \partial^2 \begin{pmatrix} 0 & -ax \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} 2x & -2a - \frac{2}{a} \\ \frac{2}{a} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} -1 & ax \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{a} \\ -\frac{2}{a} & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{a^2} \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \partial^2 \begin{pmatrix} -ax & a^2x^2 - 1 \\ -1 & ax \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} -2a & 2x(a^2+2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{2a^2+4}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_4 = \partial^2 i \begin{pmatrix} -ax & a^2x^2 + 1 \\ -1 & ax \end{pmatrix} + \partial i \begin{pmatrix} -2a - \frac{4}{a} & 2a^2x + 4x \\ 0 & \frac{4}{a} \end{pmatrix}$$
$$+ i \begin{pmatrix} 0 & 2 + \frac{4}{a^2} \\ -\frac{4}{a^2} & 0 \end{pmatrix},$$

Muchas gracias por escuchar

:)